

Geometrija 3, M i N smer
rok jun 1, 27.05.2013.

1. Neka je α regularna ravanska kriva. Slika krive β sastoji od tačaka koje su na rastojanju d od odgovarajućih tačaka slike krive α duž normala krive α .
 - (a) Ispitati regularnost krive β . Ako je kriva α zatvorena, dokazati da se može odabrati dovoljno malo d tako da je kriva β regularna.
 - (b) Izraziti krivinu krive β preko krivine krive α i d .
 - (c) Ako je kriva α elipsa, opisati krive β za različite vrednosti d i skicirati ih.

2. Data je elementarna površ $r(u, v) = (u, \operatorname{ch} u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
 - (a) Skicirati datu površ i koordinatne linije. Izračunati glavne, Gausovu i srednju krivinu date površi.
 - (b) Dokazati da je data površ izometrična ravni. Odrediti krive (loksodrome) koje zaklapaju konstantan oštar ugao φ sa koordinatnim linijama $v = \operatorname{const}$.
 - (c) Dokazati da sve geodezijske linije na površi čine koordinatne linije, kao i krive date sa $v = A \operatorname{sh} u + B$, $A, B = \operatorname{const}$, $A \neq 0$.
 - (d) Odrediti sve asimptotske i glavne linije na datoj površi.

3. Data je regularna površ čija je srednja krivina jednaka nuli (minimalna površ), a Gausova krivina različita od nule u svim tačkama.
 - (a) Dokazati da u svakoj tački P date površi postoje tačno dva asimptotska pravca, pri čemu oni zaklapaju ugao $\frac{\pi}{4}$ sa glavnim pravcima.
 - (b) Ako su v_P i w_P proizvoljna dva normalna jedinična tangentna vektora date površi u tački P , dokazati da važi $\operatorname{II}(v_P, v_P) = -\operatorname{II}(w_P, w_P)$.
 - (c) Dokazati da definicija minimalne površi ne zavisi od parametrizacije, iako srednja krivina zavisi.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$